



TITLE:

歳差回転球体内のスーパーローテーション流 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年)

AUTHOR(S):

木田, 重雄

CITATION:

木田, 重雄. 歳差回転球体内のスーパーローテーション流 (オイラー方程式の数理解析: 渦運動150年). 数理解析研究所講究録 2009, 1642: 35-42

ISSUE DATE:

2009-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140608>

RIGHT:

歳差回転球体内のスーパーローテーション流

京大・工 木田重雄 (Shigeo KIDA)

歳差回転する球体内の流体の大部分が歳差軸のまわりに歳差回転角速度より速く回転する現象をここではスーパーローテーションとよぶ。最近われわれの研究室で実験ならびに数値シミュレーションによって発見されたこの現象が、コリオリ力、圧力勾配および球状境界の相互作用によって引き起こされることを示す。

1 歳差回転球

非圧縮粘性流体の充填された球が中心を通るある軸のまわりで一定角速度 Ω_s で自転し、この自転軸が球の中心を通りこれに直交する別の軸（歳差軸という）のまわりに別の一定角速度 Ω_p で回転している（図 1）。歳差回転角速度で回転する座標系（歳差系）では、流体の運動はコリオリ力項の入ったナビエ・ストークス方程式（遠心力は圧力項に繰り込める）と連続の式で記述される。球の境界で流体はすべりなしとする。

初期条件を除くと、この力学系の流れの特性はただ 2 つのパラメーター、レイノルズ数 $Re = a\Omega_s^2/\nu$ とポアンカレ数 $\Gamma = \Omega_p/\Omega_s$ のみに依存して定まる。ここに a は球の半径、 ν は流体の動粘性係数である。これら 2 つの支配パラメーターの値に依存して、定常流や周期流あるいはカオティックな流れなど、さまざまな運動状態が現れる [1-3]。この小論では、レイノルズ数とポアンカレ数がともに大きな場合の流れに注目する。歳差系では、流れを記述する方程式にも境界条件にも時間は陽には現れず、定常流の実現が可能である。まず、 $Re = 1000$, $\Gamma = 10$ の場合に数値シミュレーションで得られた定常流を眺める。

2 スーパーローテーション流

数値計算法の詳細は省略するが、ここで紹介する数値シミュレーションのデータでは、境界層内の流れを十分解像していることを強調しておく。図 2 に、 $Re = 1000$, $\Gamma = 10$ の場合に実現された定常流の構造を模式的に示す。球面に沿う灰色の領域は厚さ $0.05a$ 程度の境界層領域である（境界層厚さを誇張して描いてある）。球体内の大部分の領域は境界層以外の白い部分で占められている。白い部分では、流れの構造が歳差軸（ z 軸）に沿って一様で、いわゆるテイラー・プラウドマンの定理が成り立っている。3 本の閉曲線は、

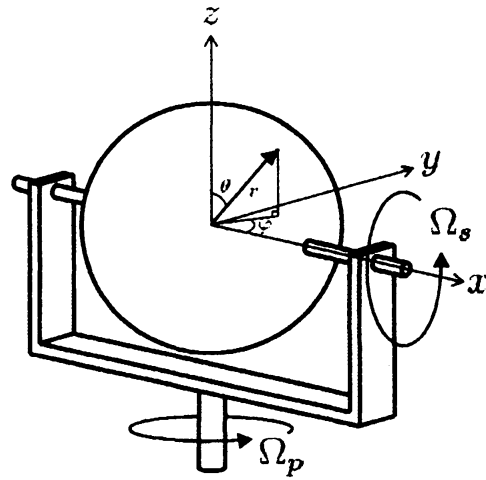


図 1: 歳差回転球と直角座標系。自転角速度を Ω_s 、歳差角速度を Ω_p とする。自転軸を x 軸、歳差軸を z 軸、これらに垂直な軸を y 軸とする直角座標系をとる。また x 軸を極軸とする球極座標系 (r, θ, φ) も併用する。

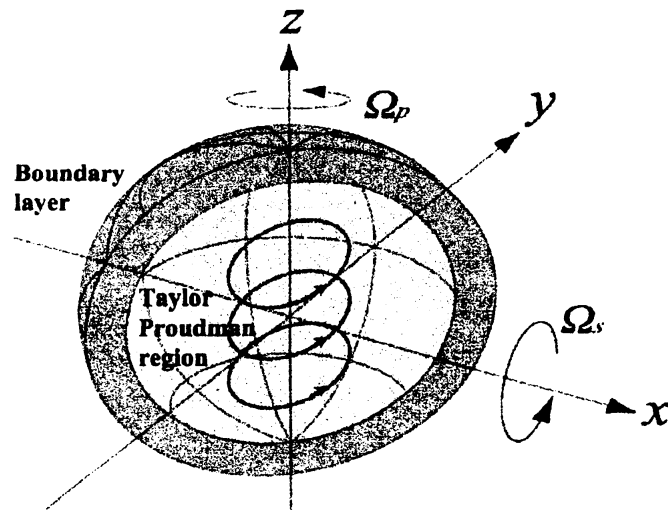


図 2: 境界層とテイラー・プラウドマン領域。球体内の状態は、球面に沿う薄い境界層と球体の大部分を占める非粘性領域に区別される。非粘性領域ではコリオリ力が卓越し歳差回転軸に沿って流れ場は一様である。この領域をテイラー・プラウドマン領域とよぶ。

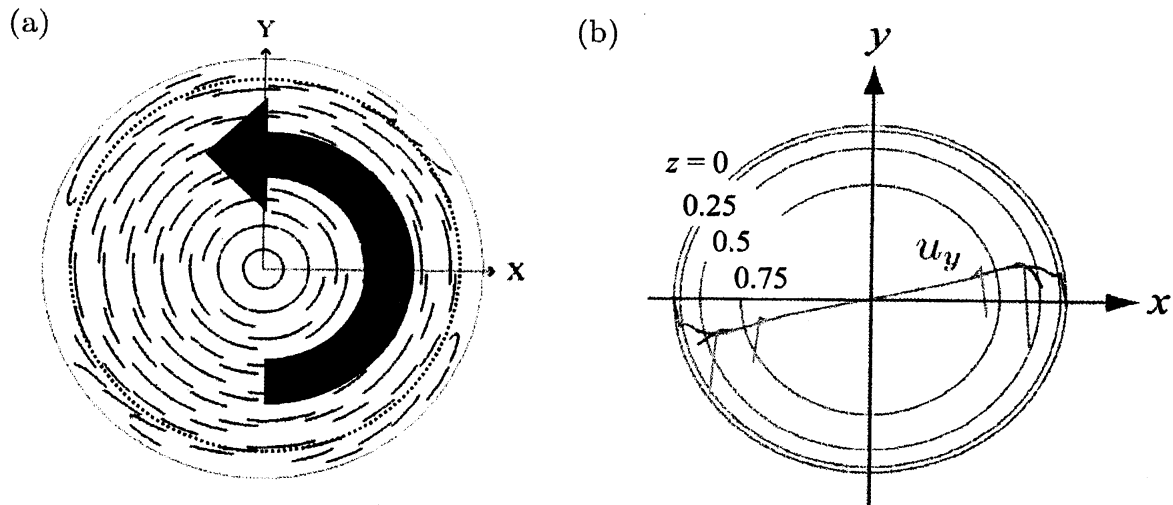


図 3: テイラー・プラウドマン領域における流れ。(a) 赤道面、 (x, y) 面、における射影流線。(b) x 軸に平行な線分上の速度の y 成分を 4 つの面 $z = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ 上で示す。

実際の数値シミュレーションのデータを用いて描いた流線である。流れは歳差軸を中心として反時計回りに歳差回転角速度より大きな角速度で旋回している。これをスーパーローテーション流と名付ける。

図 3 にテイラー・プラウドマン領域では流体がほぼ剛体回転していることを示す。図 3(a) は多数の粒子の軌道を赤道面、 (x, y) -面、に射影したものである。点線で描いた円の内部で、流線は原点を中心とする同心円上にある。大きな矢印で表した流れの向きは反時計回りで、流体が歳差回転より速く回転していることを示している。点線の円と球面境界の間は境界層である。図 3(b) に、 x 軸に平行な線分上の速度の y 成分の赤道面に平行な 4 つの異なる面でのデータを重ねて示す。円はそれぞれの面における境界である。境界近傍を除くと、すべての速度分布の線がほぼまっすぐで互いに一致している。これは、流れがほぼ剛体回転で、かつ z 軸方向に一様であることの証である。

境界近傍 ($0.95 < r \leq 1$) では、コリオリ力と粘性力が境界の球形状とあいまって、非自明な流れ構造を形成する。図 4 に球面上に射影した流線模様を示す。図 4(a) は半径 $r = 1$ の球面 (すなわち球体の境界面) 上での流線である。これは球体そのものの運動、すなわち剛体回転を表す。縦軸は緯度 $\bar{\theta} = 90^\circ - \theta$ で横軸は経度 φ である。大きな矢印は旋回流の向き、小さな黒丸は旋回を中心 (面内よどみ点) を表す。自転軸 (x 軸) は $(\varphi, \bar{\theta}) = (0^\circ, 0^\circ)$ と $(180^\circ, 0^\circ)$ で、それぞれの点のまわりに反時計回り、および時計回りに回転している。図 4(b) は境界からやや内側、半径 $r = 0.97$ の球面上の射影流線である。流れは剛体回転から大きくずれ、2 つの旋回中心は西方 (φ の減少する方向) へ移動している。よく見ると、 $\varphi = 180^\circ$ にあった旋回中心はやや北へ、また $\varphi = 0^\circ$ にあった旋回中心はやや南に

寄っている。以下に示すように、この旋回中心の南北への移動がスーパーローテーション流と密接に関係している。

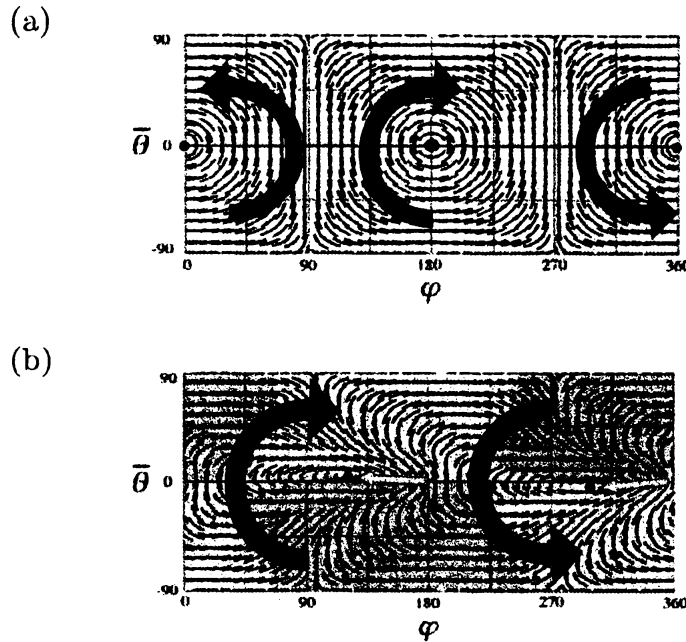


図 4: 球面上の射影流線。 $\bar{\theta} = 90^\circ - \theta$ は緯度、 φ は経度である。(a) $r = 1$, (b) $r = 0.97$ 。丸い矢印は流れの向き、黒丸は旋回中心(面内のよどみ点)を表す。速度の動径成分は灰色の濃淡で表され、濃い灰色部分で $u_r > 0$ 、薄い灰色部分で $u_r < 0$ である。

3 東方移動

境界層の外縁での流れは、テイラー・プラウドマン領域の流体運動を誘起する。図 5 に境界層内の典型的な流体粒子の軌道を (a) メルカトル図法と (b) 鳥瞰図で示す。ここで、実線は粒子軌道で、図 (a) の細い線はその南半球 ($z < 0$) の鏡像である。粒子はゆっくりと ($O(1/\Gamma)$ の速さで) 東方へ (φ の増加する方向へ) 移動しながら、時計回り (自転と同じ向き) に旋回している。北半球の部分は南半球の対応する部分よりほんの少し高緯度にあることに注意されたい。赤道に関するこの非対称性は、流体粒子に東方移動をもたらす要因になっている。というのは、この領域では流体粒子は北半球では東方へ、南半球では西方に動いており高緯度ほど速さが大きいので、南北の非対称性が粒子に正味で東方向の移動をもたらすのである。

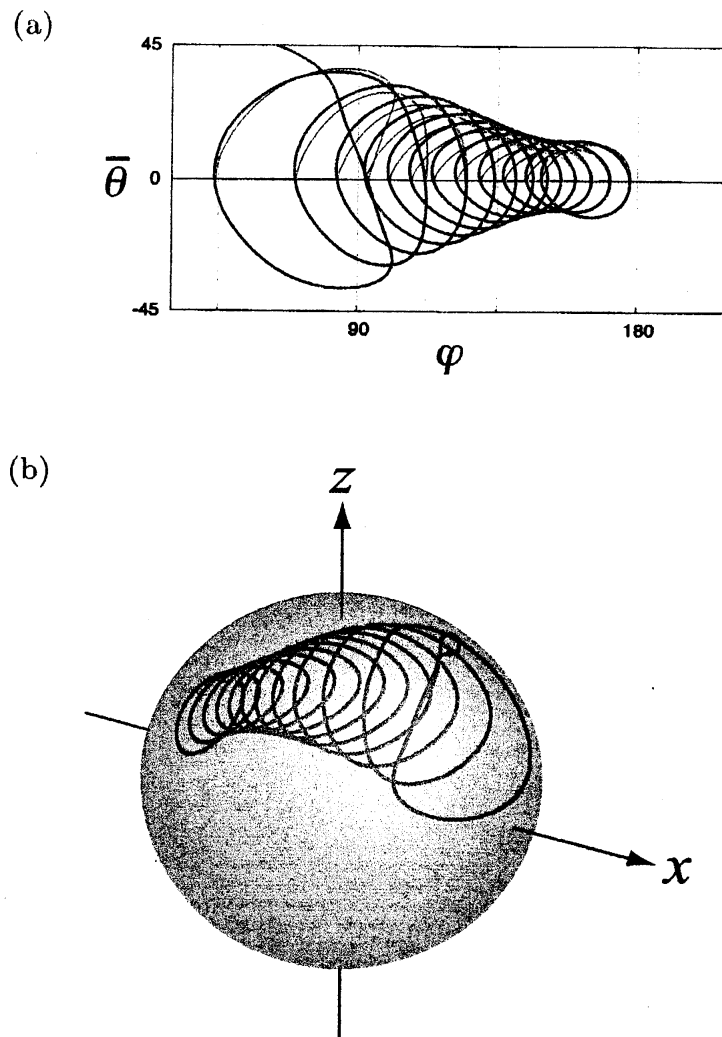


図 5: 粒子の軌道。(a) メルカトル図法。 $\bar{\theta} \equiv \pi/2 - \theta$. (b) 鳥瞰図。粒子は (a) では左から右へまた (b) では右から左へ動いている。

4 漸近解析

前節と前々節では、レイノルズ数とポアンカレ数がともに大きい極限での定常流の構造を数値シミュレーションデータに基づいて述べた。ここでは、 $Re \gg 1$, $\Gamma \gg 1$ の極限でのナビエ・ストークス方程式の解から流れの構造を理解する。この極限における漸近解析の詳細は他の機会に譲ることにし、ここでは結果のみを要約する。

通常境界層理論と同様に、支配方程式の主要項のつりあい条件から、球面に沿って厚さ $\delta = 1/\sqrt{\Gamma Re}$ の境界層の存在が示される。境界層方程式を解くことによって、速度の

方位角成分が

$$u_\theta(s, \theta, \varphi) = -(\cos(|\mu|^{1/2}s) \sin \varphi + |\mu| \sin(|\mu|^{1/2}s) \cos \varphi) \exp[-|\mu|^{1/2}s] + O(\delta), \quad (1)$$

$$u_\varphi(s, \theta, \varphi) = (\operatorname{sgn}(\mu) \sin(|\mu|^{1/2}s) \sin \varphi - |\mu| \cos(|\mu|^{1/2}s) \cos \varphi) \exp[-|\mu|^{1/2}s] + O(\delta) \quad (2)$$

のように得られる。ここに、 $\mu = \cos \theta$, $r = 1 - \delta s$ で、 $\operatorname{sgn}(\mu)$ は μ の符号を表す。速度のこの2つの成分の大きさは s の増加とともに指数関数的に減少する。すなわち、これらは境界層の外縁では無視できるほど小さくなる。一方、速度の動径成分は、

$$\begin{aligned} u_r(s, \mu, \varphi) = & -\frac{\delta \operatorname{sgn}(\mu) \sqrt{1-\mu^2}}{4|\mu|^{3/2}} \left[\sin \varphi - 3|\mu| \cos \varphi \right. \\ & - \exp[-|\mu|^{1/2}s] \left(\{ (1 + 2|\mu|^{1/2}s) \cos(|\mu|^{1/2}s) - \sin(|\mu|^{1/2}s) \} \sin \varphi \right. \\ & \left. \left. - \{ 3|\mu| \cos(|\mu|^{1/2}s) + (3|\mu| - 2|\mu|^{1/2}s) \sin(|\mu|^{1/2}s) \} \cos \varphi \right) \right] + O(\delta^2) \quad (3) \end{aligned}$$

と書ける。これは、 $s \rightarrow \infty$ の極限で、有限の値

$$u_r(\infty, \mu, \varphi) = -\frac{\delta \operatorname{sgn}(\mu) \sqrt{1-\mu^2}}{4|\mu|^{3/2}} (\sin \varphi - 3|\mu| \cos \varphi) \quad (4)$$

に漸近し、テイラー・プラウドマン領域での歳差軸方向の流れを誘導する(式(7)参照)。

つぎに、テイラー・プラウドマン領域では、速度場が z に依存しないので、円筒座標系 (ρ, φ, z) を用いるのが便利である。ここに、 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ である。円筒座標系における速度場の ρ , φ および z 成分をそれぞれ $(v_\rho(\rho, \varphi), v_\varphi(\rho, \varphi), v_z(\rho, \varphi))$ で表すと、

$$v_\rho(\rho, \varphi) = O\left(\frac{1}{\Gamma}\right), \quad (5)$$

$$v_\varphi(\rho, \varphi) = O\left(\frac{1}{\Gamma}\right), \quad (6)$$

$$v_z(\rho, \varphi) = \frac{\delta \rho}{4(1-\rho^2)^{5/4}} (3\sqrt{1-\rho^2} \cos \varphi - \sin \varphi) + O\left(\frac{1}{\Gamma}\right) \quad (7)$$

が得られる。また、 $O(1/\Gamma)$ の速度の方位角方向成分の方位角平均 $\langle \cdots \rangle_\varphi$ で表す) は、

$$\langle v_\varphi(\rho, \varphi) \rangle_\varphi = \frac{\rho}{\Gamma} \frac{442 - 457\rho^2 + 68\sqrt{1-\rho^2}}{7200(1-\rho^2)} \quad (8)$$

となる。この速度分布を図6に示す。速度分布は、領域内の大部分で正でありかつ直線状になっている。すなわち、ほぼ剛体回転で歳差角速度より大きな角速度で中心軸のまわりを回っている。

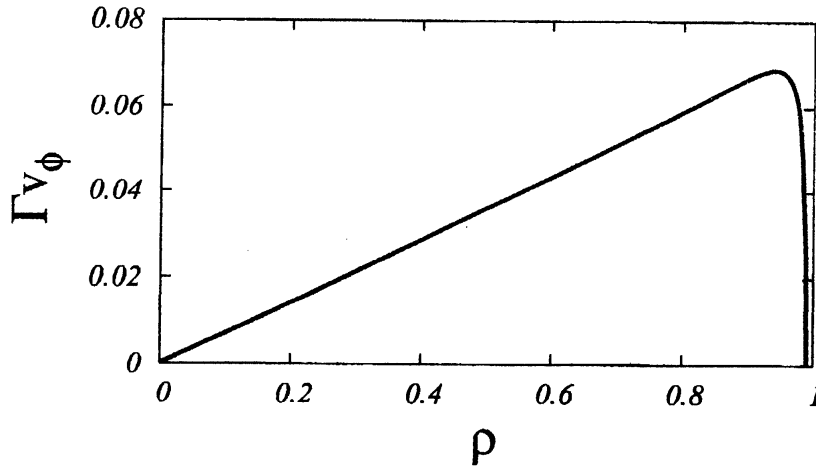


図 6: テイラー・プラウドマン領域における速度の φ 成分の φ 方向平均, $\langle v_\varphi(\rho, \varphi) \rangle_\varphi$.

5 スーパーローテーション流の説明

歳差回転球体内の流体が全体として歳差回転より速く回転するというスーパーローテーション流は、実験的に観測された流体の運動方程式の解 (式 (8)) としてその存在は明らかであるが、その誘起の物理的メカニズムは簡単ではない。実際、解 (8) は $1/\Gamma$ 展開の 2 次の項ではじめて現れるもので、コリオリ力項と移流項の相互作用をきちんと理解する必要がある。以下は、現段階でわれわれが考えているスーパーローテーション流の発生メカニズムである。

説明の便宜のために、境界層内の方位角 $90^\circ < \varphi < 270^\circ$ の領域に着目する (図 3(a) 参照)。ここでは、流体粒子は自転軸の負の極 $(\bar{\theta}, \varphi) = (0^\circ, 180^\circ)$ のまわりに時計回りに旋回している。この領域の北半球では、流体は東方へ移動し球面境界に向かうコリオリ力を受けている。また、南半球での流体は西方に移動し球面境界から遠ざかる方向にコリオリ力を受けている。コリオリ力の動径成分は圧力勾配と近似的につりあっている。ところで、境界層内のいたるところで、圧力の $1/\Gamma$ 展開の主要項は一樣であることが境界層方程式から証明できる (証明は割愛)。したがって、圧力の次のオーダーは北半球ではより低く、南半球ではより高くなる。圧力のこの南北の不均衡により流体粒子は北方へ移動する。流体粒子の軌道のこのようなちょっとした南北方向の非対称性が境界層の流体粒子の東方移動をもたらす (図 5 参照)。同様の議論で、自転軸の正の極 $(\bar{\theta}, \varphi) = (0^\circ, 0^\circ)$ のまわりでも流体粒子が東方移動することがわかる。境界層でのこの東方移動が、ひいては内部領域のスーパーローテーション流を引き起こすのである。以上の直感的な議論を裏付けるため、われわれはいま圧力場や速度場の詳しい解析を行っている。

本研究の数値シミュレーションは京都大学基礎物理学研究所のSX8を用いて行った。記して謝意を表する。

参考文献

- [1] Goto, S., Ishii, N., Kida, S., Nishioka, M. Turbulence generator using a precessing sphere. *Phys. Fluids* **19** (2007) 061705.
- [2] Kida, S., Nakayama, K. Helical flow structure in a precessing sphere. *J. Phys. Soc. Japan* **77** (2008) 054401.
- [3] Kida, S., Nakayama, K., Honda, N. Streamline tori in a precessing sphere at small Reynolds numbers. *Fluid Dyn. Res.* **41** (2009) 011401.